Kalkulus előadás

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2023/2024 ősz

Elérhetőségek

Előadó: Nagy Noémi (nagyn.bme@gmail.com)

Fogadóóra: hétfő 14-15 (H épület 3. emelet 310-es ajtó)

A pontos tárgykövetelmények a `https://math.bme.hu/~nn/kalkulus_bevmat_23o.html` oldalon találhatóak.

A mátrix definíciója

Mátrixnak egy n sorból és k oszlopból álló (szám)táblázatot nevezünk, például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

esetén $n = 3$, $k = 2$. Ekkor az n, k számpárt a mátrix méretének vagy dimenziójának nevezzük és úgy jelöljük, hogy $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$.
Megjegyzés: A mátrixok a vektorok általánosításai. Egy vektor annyi dimenziós, amennyi elemből áll. Például: $(2, 1, 3, 1, 5)$ egy ötdimenziós vektor, de tekinthető egy 1×5 dimenziós mátrixnak is.

Indexelés

A mátrixot többnyire nagy betűvel, az elemeit kisbetűvel jelöljük. A mátrix elemeinek helyét a táblázaton belül az adott elem indexével jellemezzünk. Az első szám azt mondja meg, hogy hányadik sorban, a második szám pedig azt, hogy hányadik oszlopban van. Ezeket a kisbetű alsó indexébe írjuk.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

Ekkor $a_{1,2}$ elem az első sor második oszlopában lévő elem, itt $a_{1,2} = 4$.

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása: Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása: Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása: Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixokkal

Hasonlóan a vektorokhoz a mátrixokat is lehet konstanssal szorozni és egymással összeadni, kivonni, tehát mátrixok lineáris kombinációját venni.

- Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

- Mátrixok összeadása: Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha dimenziójuk megegyezik. Ekkor az azonos pozíciókban lévő elemeket adjuk össze. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

A műveletek tulajdonságai

- **Asszociativitás** Az összeadás átzárójelezhető, azaz $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}=\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$
- **Kommutativitás** Az összeadás sorrendje felcserélhető, azaz $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$
- **Zérus elem** Létezik egy olyan mátrix, amellyel tetszőleges A mátrixra $\mathrm{A}+0=0+\mathrm{A}=\mathrm{A}$, ($0$ jelöli a csak nullákat tartalmazó mátrixot)
- **Ellentett** Minden A mátrixhoz van olyan $-\mathrm{A}$-val jelölt mátrix, amelyre $-\mathrm{A}+\mathrm{A}=\mathrm{A}+(-\mathrm{A})=0$ (itt a jobboldalon egy mátrix áll, nem egy szám!)
- **Konstans kiemelhető** Ha c és d valós számok és A és B tetszőleges mátrixok, akkor $(c+d)\mathrm{A}=c\mathrm{A}+d\mathrm{A}$, $c(\mathrm{A}+\mathrm{B})=c\mathrm{A}+c\mathrm{B}$, $(cd)\mathrm{A}=c(d\mathrm{A})$
- Megjegyzés: $\mathrm{A}-\mathrm{B}:=\mathrm{A}+(-\mathrm{B})$

Transzponálás

Mátrixokkal olyan műveleteket is lehet végezni amit vektorokkal nem szoktunk. Az első ilyen művelet a transzponálás.

Az A, $n \times k$ méretű mátrix transzponáltján azon $k \times n$-es mátrixot értjük, amelynek sorai megegyeznek az eredeti mátrix oszlopaival. Jele: A^{T}. Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ugyanezt kapjuk, ha a mátrixot a főátlójára $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots)$ tükrözzük.

Indexekkel kifejezve az A^{T} mátrix (i, j)-edik eleme megegyezik az eredeti mátrix (j, i)-edik elemével, azaz $a^T_{i,j} = a_{j,i}$.

Transzponálás

Mátrixokkal olyan műveleteket is lehet végezni amit vektorokkal nem szoktunk. Az első ilyen művelet a transzponálás.

Az A, $n \times k$ méretű mátrix transzponáltján azon $k \times n$-es mátrixot értjük, amelynek sorai megegyeznek az eredeti mátrix oszlopaival. Jele: A^{T}. Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ugyanezt kapjuk, ha a mátrixot a főátlójára $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots)$ tükrözzük.

Indexekkel kifejezve az A^{T} mátrix (i,j)-edik eleme megegyezik az eredeti mátrix (j,i)-edik elemével, azaz $a^T_{i,j} = a_{j,i}$.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j-dik eleme az A mátrix i. sorának és a B mátrix j. oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j-dik eleme az A mátrix i. sorának és a B mátrix j. oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek i, j-dik eleme az A mátrix i. sorának és a B mátrix j. oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. Az ilyen mátrixokat kompatibilisnek nevezzük.

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A-nak 2 oszlopa van, C-nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C-nek 4 oszlopa van, de A-nak csak 3 sora.

Megjegyzés: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A-nak 2 oszlopa van, C-nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C-nek 4 oszlopa van, de A-nak csak 3 sora.
Megjegyzés: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A-nak 2 oszlopa van, C-nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C-nek 4 oszlopa van, de A-nak csak 3 sora.

Megjegyzés: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ és $\mathrm{AC} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Példa

Az AC szorzat kiszámításához rendezzük el átlósan a két mátrixot.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Példa

A szorzat első sorának első eleme az A mátrix első sorának, és a C mátrix első oszlopának skalárszorzata.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Most $(2,4)$-nek és $(6,5)$-nek kell a skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy számítható ki, hogy az azonos pozíciókban lévő elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Itt:
$< (2,4),(6,5) >= 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 32.$

Példa

A szorzat első sorának első eleme az A mátrix első sorának, és a C mátrix első oszlopának skalárszorzata.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Most $(2,4)$-nek és $(6,5)$-nek kell a skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy számítható ki, hogy az azonos pozíciókban lévő elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Itt:
$< (2,4),(6,5) >= 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 32$.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \color{red}{32} & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & {\color{red}-2} & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & \color{red}{24} & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & \color{red}{2} \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ \color{red}{36} & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.
Megjegyzés: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ és $\mathrm{AC} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Példa

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & -2 & 24 & 2 \\ 36 & -5 & 32 & 3 \\ 48 & 8 & 16 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×4-es mátrix az AC szorzat.
Megjegyzés: $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ és $\mathrm{AC} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{red}{6} \\ \color{red}{5} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{4} \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{red}{6} \\ \color{red}{5} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ \color{red}{8} & \color{red}{7} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Mátrix szorzása vektorral

Hasonlóan történik a szorzás, ha mátrixot vektorral szorzunk:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 60 \\ 83 \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrix szorzása vektorral 2

Újabb érdekes példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x - 4y - 5z \\ -3x - 5y + 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

A mátrixszorzás nem kommutatív

Ha AB elvégezhető, attól még lehet, hogy BA nem végezhető el. Ha mindkettő értelmezett és egyforma méretű is lenne (ez sem biztos), általában akkor sem igaz, hogy $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 59 & 27 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 38 & 48 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

Létezik egységelem a mátrixszorzásra nézve

Az a **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrix aminek a főátlójában 1-esek mindenütt másutt meg nullák állnak az egységmátrix vagy identitás mátrix. Jele I (identitás) bármilyen kompatibilis mátrixszal bármilyen irányból megszorozva az eredeti mátrixot adja vissza.

Például

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

A mátrixszorzás tulajdonságai

- **Asszociativitás** Ha a mátrixok kompatibilisek, akkor a mátrixok szorzása átzárójelezhető, azaz $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$
- **Disztributivitás(ok)!** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC}$, és $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC}+\mathrm{BC}$
- **Konstans kiemelhető** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $d(\mathrm{AB}) = (d\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(d\mathrm{B})$
- **Egységelem** Az $n \times n$-es mátrixok körében egyértelműen létezik egy olyan I mátrix (egységmátrix), amellyel $\mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$. Ez a mátrix egyébként a főátlójában csupa egyest, egyébként nullákat tartalmazó mátrix.

Mátrixok inverze

Ha az A $n \times n$-es **négyzetes** mátrixhoz létezik olyan mátrix amivel megszorozva azt az $n \times n$-es identitás mátrixot kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy A invertálható, és inverzét A^{-1}-el jelölöm.

Tehát $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$.

Mátrixok inverze

Ha az A $n \times n$-es **négyzetes** mátrixhoz létezik olyan mátrix amivel megszorozva azt az $n \times n$-es identitás mátrixot kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy A invertálható, és inverzét A^{-1}-el jelölöm.

Tehát $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}$.

- Példa: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix inverze az $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Mátrixok inverze

Nem minden mátrixnak van inverze. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs inverze. Miért?

Mátrixok inverze

Nem minden mátrixnak van inverze. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs inverze. Miért?

Kérdés: Hogyan dönthetjük el, hogy egy mátrix invertálható-e vagy nem? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához szükségünk lesz a determináns fogalmára.

Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.

Mi a determináns?

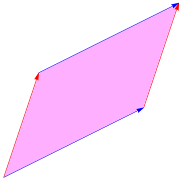
- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom előjeles területe

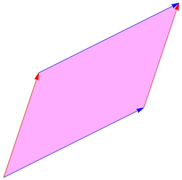
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom előjeles területe, ha $n = 3$, akkor pedig

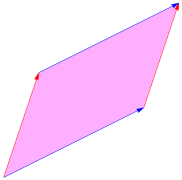
$$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

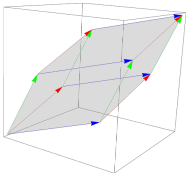


Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom előjeles területe, ha $n = 3$, akkor pedig az oszlopvektorok által kifeszített test előjeles térfogata

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

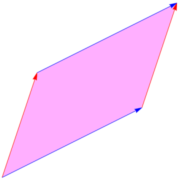


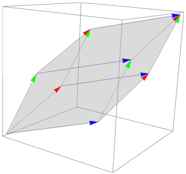


Mi a determináns?

- Minden A **négyzetes**, azaz $n \times n$-es mátrixnak van determinánsa, jele: $\det(\mathrm{A})$ vagy $|A|$.
- Ha $n = 2$, akkor a determináns az oszlopvektorok által kifeszített síkidom előjeles területe, ha $n = 3$, akkor pedig az oszlopvektorok által kifeszített test előjeles térfogata

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$





- Ha $n \geq 4$, akkor nem tudom lerajzolni :)

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \color{red}{1} & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k-t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk.

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k-t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk. Tehát most $k = 1$ és az előjeles szorzat: $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2$.

A determináns definíciója

- Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk (ezt $n \times n$-es mátrix esetén $n!$ féleképp lehet megtenni).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

- Majd ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel, azaz a $(-1)^k$ szorzóval. A k-t úgy kapjuk, hogy megnézzük, hány sorcsere kellene ahhoz, hogy a kiválasztott elemekből főátlót kapjunk. Tehát most $k = 1$ és az előjeles szorzat: $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2$.
- Végül az eredeti mátrixban az összes ilyen lehetséges szorzatot a megfelelő előjellel összeadjuk. Ez az összeg a mátrix determinánsa.

Kétszer kettes mátrix determinánsa

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánsa

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az egyik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánsa

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az egyik és a másik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Kétszer kettes mátrix determinánsa

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az egyik és a másik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Látható, hogy a második előjele (-1), így a determináns:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Kétszer kettes mátrix determinánsa

Számoljuk ki definíció szerint! Mivel $n = 2$, $2! = 2$ féleképpen lehet elemeket kiválasztani. Az egyik és a másik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Látható, hogy a második előjele (-1), így a determináns:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Általában nem a definíció alapján számítjuk ki a mátrix determinánsát. Két gyakran használt módszer a determináns meghatározására a kifejtési tétel és a Gauss-elimináció.

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$-es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n-1) \times (n-1)$ determináns kiszámítására.

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$-es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n-1) \times (n-1)$ determináns kiszámítására.

Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy tetszőleges sorát/oszlopát. Minden pozíciót ellátunk egy előjellel a sakktábla-szabály szerint.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$-es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n-1) \times (n-1)$ determináns kiszámítására.

Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy tetszőleges sorát/oszlopát. Minden pozíciót ellátunk egy előjellel a sakktábla-szabály szerint. Kék pozitív piros negatív

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \color{blue}{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \color{blue}{1} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} {\color{blue}1} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével . . . és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ {\color{red}0} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével . . . és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{0} & 3 & 0 & 0 \\ \color{blue}{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\ldots|$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Ezután az első elemet megszorozzuk a hozzá tartozó aldeterminánssal. Az aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az elemhez tartozó sort és oszlopot elhagyjuk.

Így folytatjuk a kiválasztott oszlop második elemével ... és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cancel{1} \\ \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ \color{red}{0} \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{matrix} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot |\ldots| - \ldots$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3-as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel,

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3-as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3-as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} {\color{blue}3} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3-as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

Folytatjuk a sakktábla szabály szerint ...

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Most az egyetlen megmaradt 3×3-as determinánst számoljuk tovább kifejtési tétellel, mondjuk az első sor szerint kifejtve.

Folytatjuk a sakktábla szabály szerint ...

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1)$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -3$$

Determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Így a végeredmény:

$$1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -3$$

Tehát

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Felső háromszögmátrix determinánsa

- Egy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa

- Egy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa

- Egy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa

- Egy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa

- Egy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, hiszen az első oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A determináns tulajdonságai

- Ha a főátló alatt minden elem 0, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.
- Ha valamelyik sor vagy oszlop minden eleme 0, akkor a determináns is 0.
- Ha két sor megegyezik, akkor a determináns 0. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha egyik sor a másik λ-szorosa, akkor a determináns 0. Ugyanez oszlopra is igaz.

A determináns tulajdonságai

- Ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát, akkor a determináns nem változik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns (-1)-szeresére változik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha valamelyik sor minden elemét λ-val megszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- A mátrix transzponáltjának determinánsa megegyezik az eredeti mátrixéval, azaz $\det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathrm{A})$.

Szorzástétel Az AB mátrixszorzat determinánsa megegyezik az A és B mátrixok determinánsának szorzatával, azaz $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists \mathrm{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists \mathrm{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$, és nyilván $\det(\mathrm{I}) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{A}^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists \mathrm{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Gondoljuk meg, hogy ha $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$, és nyilván $\det(\mathrm{I}) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{A}^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

A determináns és az inverz kapcsolata

- Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Tehát

$$\exists \mathrm{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

  Gondoljuk meg, hogy ha $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$, és nyilván $\det(\mathrm{I}) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért $1 = \det(\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{A}^{-1})$, vagyis A determinánsa nem lehet 0.

- Az invertálható mátrixokat más szóval regulárisnak nevezzük. Azon mátrixokat, amelyek nem invertálhatóak szingulárisnak hívjuk.

A mátrixműveletek kapcsolata

Amennyiben valamennyi művelet értelmezett, akkor az alábbi szabályok érvényesek:

- $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$
- $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
- $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
- $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$